## DIMOSTRAZIONE

Le formule che risalgono all'impedenza complessa di un'induttanza dalla misura del S11 sono le seguenti [1]:

$$Z = R + jX = Z_0 \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \, [\Omega] \qquad 0.1$$

Dove $Z_0$ è l'impedenza dello strumento (50 Ohm) e $\Gamma$ è il coefficiente di riflessione che coincide col parametro scatter S11. Il parametro $\Gamma$, così come S11, è un numero complesso fatto di una parte reale e di una parte immaginaria.

$$\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i \qquad 0.2$$

Sostituendo la 0.2 nella 0.1 si ottiene:

$$Z = R + jX = Z_0 \frac{1+\Gamma_r+j\Gamma_i}{1-\Gamma_r-j\Gamma_i} \, [\Omega] \qquad 0.3$$

Razionalizzando il denominatore della 0.3 e sviluppando il numeratore si ottiene:

$$Z = R + jX = Z_0 \frac{1+\Gamma_r+j\Gamma_i}{1-\Gamma_r-j\Gamma_i} = Z_0 \frac{(1+\Gamma_r+j\Gamma_i)(1-\Gamma_r+j\Gamma_i)}{(1-\Gamma_r-j\Gamma_i)(1-\Gamma_r+j\Gamma_i)} = Z_0 \frac{1-\Gamma_r^2-\Gamma_i^2+j2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i{}^2} \, [\Omega] \qquad 0.4$$

Dalla 0.4 separiamo la parte reale R e la parte immaginaria X dell'impedenza Z, che sono:

$$R = Z_0 \frac{1-\Gamma_r{}^2-\Gamma_i{}^2}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2} \, [\Omega] \qquad 0.5$$

$$X = Z_0 \frac{2\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2} \, [\Omega] \qquad 0.6$$

Ora esaminiamo il toroide, facendo riferimento alla figura 1:

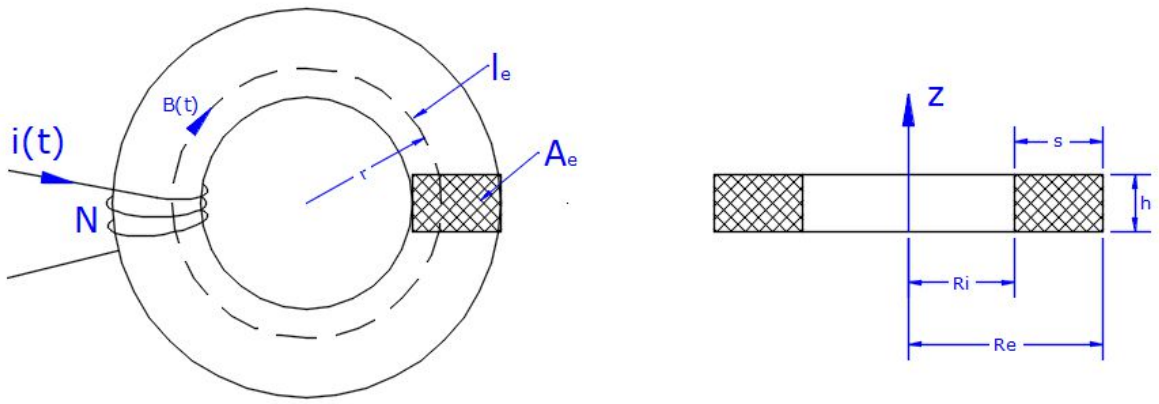


*Figura 1: Avvolgimento di N spire attorno ad un toroide a sezione rettangolare*

Indichiamo le principali equazioni che regolamentano l'induzione magnetica:

$\oint H \cdot dl = N\, i$ Legge di Ampère (N numero di spire); 0.7

$B = \mu H$ Relazione tra induzione magnetica B e campo magnetico H; 0.8

$\Phi = B \cdot A_e$ Relazione tra flusso magnetico e induzione magnetica B; 0.9

$L = N \frac{\Phi}{i}$ Definizione di induttanza. 0.10

Per ricavare l'induttanza di un avvolgimento di N spire su di un toroide a sezione quadrata dobbiamo trovare il flusso magnetico che circola nel toroide. Per fare ciò dobbiamo partire dalla legge di Ampère (equazione 0.7) ove abbiamo sostituito il vettore campo magnetico col vettore densità di flusso magnetico B (equazione 0.8).

$$\oint B \cdot dl = N\, \mu\, i \qquad 0.11$$

Scegliamo di calcolare la circuitazione del vettore densità di flusso attorno alla linea chiusa tratteggiata di figura 1 di sx, perché comoda. Infatti, il prodotto scalare del vettore B attorno alla linea chiusa scelta è costante e vale:

$$\oint B \cdot dl = B\, 2\pi r \qquad 0.12$$

Se nella 0.11 sostituiamo la 0.12 ed esplicitiamo lo scalare B si ottiene:

$$B = \frac{N\, \mu\, i}{2\pi\, r} \qquad 0.13$$

È evidente che lo scalare B sia costante lungo la linea chiusa ma dipenda dalla distanza *r* dal centro del toroide.

Per ricavare il flusso magnetico utilizziamo la 0.9 ove al posto di B metteremo la 0.13 e l'area $A_e$ diventa un integrale doppio in *dr* e *dz* sulla sezione rettangolare del toroide.

$$\Phi = \int_0^h dz \int_{Ri}^{Re} \frac{N\,\mu\,i}{2\pi\,r} dr \qquad 0.14$$

Il primo integrale risulta, ovviamente, l'altezza h mentre il secondo integrale risulta:

$$\Phi = h \frac{N\,\mu\,i}{2\pi} ln\left(\frac{Re}{Ri}\right) \qquad 0.15$$

Infine, il flusso magnetico calcolato con la 0.15 può essere inserito nella definizione di induttanza 0.10.

$$\mathrm{L} = \frac{h\,N^2\,\mu}{2\pi} ln\left(\frac{Re}{Ri}\right) \text{ [H]} \qquad 0.16$$

Sostituendo nella 0.16 la permeabilità col prodotto $\mu = \mu_0\mu_r$ e sapendo che $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ si ottiene:

$$\mathrm{L} = 2h\,N^2\mu_r ln\left(\frac{Re}{Ri}\right) 10^{-7} \text{ [H]} \qquad 0.17$$

Dove: $\mu_r$ è la permeabilità relativa; N è il numero di spire; h è l'altezza del toroide (in m); $R_e$ è il diametro esterno del toroide (in m) e $R_i$ è il diametro interno del toroide (in m).

Se poniamo $L_0$ essere l'induttanza con $\mu_r$=1 si ha:

$$L_0 = 2h\,N^2 ln\left(\frac{Re}{Ri}\right) 10^{-7} \text{ [H]} \qquad 0.18$$

Quindi, la 0.17 si riscrive nel seguente modo:

$$L = L_0\mu_r \text{ [H]} \qquad 0.19$$

L'impedenza di un induttore su ferrite può essere espressa in funzione della permeabilità relativa complessa [2].

$$Z = j\omega L_0(\mu_r' - j\mu_r'') = \omega L_0\mu_r'' + j\omega L_0\mu_r' = R + jX \text{ [}\Omega\text{]} \qquad 0.20$$

Dove $\mu_r'$ e $\mu_r''$ sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria della permeabilità relativa complessa $\mu_r$, che danno origine rispettivamente alla reattanza X ed alla resistenza R dell'impedenza Z.

Alle basse frequenze, intorno ad 1 kHz, la permeabilità relativa di un solenoide avvolto su una ferrite è considerato essere nel tratto della curva di magnetizzazione iniziale. Per cui, anche l'induttanza è da considerarsi iniziale. Quindi, sia la permeabilità relativa che l'induttanza assumono il pedice "i"; che sta per *iniziale*.

Per cui, l'induttanza iniziale, che misureremo con un LCR-meter a 1kHz, risponderà anch'essa alla 0.19 dalla quale ricaviamo $L_0$.

$$L_0 = \frac{L_i}{\mu_i} \text{ [H]} \qquad 0.21$$

Infine, dalla formula dell'impedenza 0.20, si ricavano i parametri μ' e μ" dove al posto di $L_0$ mettiamo l'equazione 0.21. Il risultato sono le formule che utilizzo nel foglio di Excel.

$$\mu_r' = \frac{X}{2\pi f \cdot L_0} = \frac{X \cdot \mu_i}{2\pi f \cdot L_i} \qquad 0.22$$

$$\mu_r'' = \frac{R}{2\pi f \cdot L_0} = \frac{R \cdot \mu_i}{2\pi f \cdot L_i}\,. \qquad 0.23$$

**BIBLIOGRAFIA**

[1] D. M. Pozar: Microwave Engineering, 3° ed. John Wiley & Sons, 2005.

[2] E. C. Snelling: Soft Ferrites, ed. Ilieffe Books Ltd, 1969.